

# Integration av matematik och teknik på ingenjörsutbildningar

Anders Hultgren\*, Wlodek Kulesza\*, Magnus Nilsson\* och Björn Walther\*\*

\*Blekinge Tekniska Högskola, Sverige (Tel: +46 709 40 28 53, e-post: anders.hultgren@bth.se, wlodek.kulesza@bth.se, magnus.g.nilsson@bth.se)

\*\*Lunds universitet, Sverige (e-post: bjorn.walther@math.lu.se)

**Sammanfattning:** I detta bidrag presenterar vi en uppläggning av integrerade kurser i matematik och tillämpningar, vilken använts inom högskoleingenjörsutbildningen vid Högskolan i Kalmar. Kursverksamheten, som bedrivs inom ramen för kurspaketet *ingenjörsvetenskap*, tillgodoser såväl behovet av att betona matematikens roll som ett generellt och abstrakt verktyg för problemlösning som behovet av att ge studenterna bra baskunskaper i matematik i anslutning till möjliga tillämpningsområden. Presentationen är en omarbetad version baserad på presentationer på Utvecklingskonferensen för ingenjörsutbildning i november 2008 vid KTH och på Pedagogiska seminariet i mars 2009 vid Matematikcentrum, Lunds universitet.

**Nyckelord:** Undervisning, integration, matematik, teknik, ingenjörsutbildning.

## 1. Inledning

Sedan 1973 har det genomförts sju nationellt omfattande studier av matematikämnet (HSV2005). Samtliga studier konstaterar, att blivande studenter har bristande förkunskaper i matematik och att detta påkallar förändrade undervisningsmetoder.

Även matematikundervisningen i grundskolan diskuteras sedan flera år. En TV-dokumentär visade hösten 2007 hur problemklassen 9A på Johannesskolan i Malmö efter ett halvt år med ny matematiklärare kunde skaffa sig medelpoängen 17,11 på ett nationellt prov i matematik. Medelpoängen i Sverige ligger på drygt 11 poäng. Endast tre skolor hade över 14 poäng på samma prov. Resultatet antyder, att det är av stor betydelse hur den pedagogiska verksamheten i matematik bedrivs.

Bedömargruppen i utvärderingen av ingenjörsutbildning år 2002 (HSV2003) resp. utredarna av matematikundervisningen under första året på tekniska och naturvetenskapliga utbildningar (HSV2005) skriver om vikten av och svårigheterna med att förändra matematikundervisningen på ingenjörsutbildningar. Bedömargruppen betonar att ingenjörsutbildning bör vila på en grund av matematik.

*Den tekniska kompetensen måste byggas upp från en grund av matematik och grundläggande teknik- och naturvetenskapliga kurser för att göra det*

*möjligt för den färdigutbildade ingenjören att förstå komplexitet och svårigheter i verkliga problemställningar samt att kommunicera med ingenjörer från andra teknikområden.* (HSV2003, s. 67)

Utredarna framhåller att matematikundervisningen på ingenjörsutbildningar har två syften: dels att tillhandahålla metoder för teknisk problemlösning och dels att träna logiskt tänkande.

*Vi har betonat matematikens roll som ett generellt och abstrakt verktyg för problemlösning. Men det finns andra aspekter av ämnet. Den matematiska stringensen garanterar olika matematiska påståendens absoluta tillförlitlighet. Professor Lars Gårding uttrycker detta i en filosofisk dialog, *Metaforer*, på följande sätt: Matematiken utgör en sträng ram som inte släpper igenom lösa förmodanden. Sådana kan bara mycket sällan ge upphov till meningsfull matematik.* (L. Gårding, *Metaforer. I: G. Berg, Det matematiska kulturarvet. Dialoger 71-72. 2005.*) *Det är viktigt att studenten också kommer i kontakt med denna något kärvare sida av matematiken.* (HSV2005, s.13-14)

Bedömargruppen skriver att ansvaret för att lyckas med matematikundervisningen vilar på såväl matematiklärarna som på teknicklärarna.

*Det viktigaste syftet med matematikkurserna är att ge studenterna bra baskunskaper i anslutning till möjliga tillämpningsområden. I största möjliga*

utsträckning bör studenterna beredas möjlighet att efterhand tillämpa de vunna kunskaperna. Vid matematisk modellering inom teknikämnena bör teknicklärarna på olika sätt knyta an till aktuella moment i matematikkurserna. Ett sådant arbetssätt ökar studenternas möjligheter att befästa kunskaperna. För att nå framgång i detta arbete fordras ett utvecklat samarbete mellan matematiklärarna och lärarna i de berörda teknikämnena. Ansvaret vilar på de båda lärarkategorierna. (HSV2003, s. 125)

Utredarna pekar på svårigheterna att i den praktiska undervisningen koppla matematiken och de tekniska tillämpningarna.

Redan i 1993 års utvärdering påpekades att kopplingen mellan matematiken och de tekniska tillämpningarna borde stärkas. Det är en intressant fråga varför detta ännu inte har skett. En rimlig aspekt av svaret på denna fråga är att det är svårt att skapa en koppling i den praktiska undervisningen. (HSV2005, s. 24)

Utredarna argumenterar vidare för att det är viktigt att arbeta vidare med försök att integrera matematiken och de tekniska tillämpningarna.

Vårt huvudintryck är att matematikinnehållet är mycket traditionellt och i allmänhet inte anpassat till utbildningsprogrammets profiler. Det finns många skäl till det. Det kan både handla om ekonomiska nödvändigheter och ämnesmässiga värderingar. Vi tror dock att tillämpningarna utgör en outnyttjad potential. Som det är nu ses tillämpningarna främst som en väg ut ur matematiken. Men de kan också vara en väg in i matematiken. Anknytningen till olika tillämpningar kan både öka studenternas motivation och deras förståelse. Detta är inte bara till nytta för tillämpningarna utan också för matematiken själv. Att knyta matematiken närmre tillämpningarna i den grundläggande högskoleutbildningen i matematik är ingen lätt uppgift. Det är en process som fordrar mycket tid, mycket energi samt stor öppenhet från både matematiklärare och företrädare för tillämpade ämnen. (HSV2005, s52)

Vid Högskolan i Kalmar har under ca tio års tid olika försök att integrera matematik- och teknikundervisning bedrivits. Försök har gjorts att undervisa matematik och teknik i en och samma kurs och av en och samma lärare. Försök har gjorts

att introducera matematik, fysik och teknik i en och samma kurs av ett lärarlag. Slutligen har försök även gjorts med att knyta matematikkurser direkt till vissa tillämpningar i teknikkurser.

Högskolan i Kalmar är inte unikt när det gäller att pröva olika sätt att integrera matematik- och teknikundervisning. Det förekommer på många lärosäten, både nationellt och internationellt. Vi tror dock att den organisation vi föreslår för integrationen är värd att spridas. I denna presentation beskriver vi det enligt vår erfarenhet mest lyckosamma sättet att integrera matematik- och teknikundervisning. Verksamheten omfattar ett kurspaket, vilket vi gett namnet *ingenjörsvetenskap*.

## 2. Beskrivning av upplägg och delkurser

Hela uppläggningsen med matematik och tillämpningar motsvarar halv studietakt under tre terminer, d.v.s. totalt 45 hp. Matematik utgör 27 hp och matematiska tillämpningar i teknik 18 hp. Matematiken är uppdelad i 6 delkurser, i fortsättningen kallade *moduler*, om vardera 4,5 hp. Till varje matematikmodul finns en modul av tillämpningar om 3 hp, som läses parallellt med matematiken. Se Tabell 1. Varje par av en matematikmodul och en tillhörande tillämpningsmodul har en gemensam kursplan omfattande 7,5 hp.

**Tabell 1.** Kurser i Ingenjörsvetenskap

Termin 1	
Algebra 4,5 hp	Linjär algebra, 4,5 hp
Algoritmer, 3 hp	Datoranimeringar, 3 hp
Termin 2	
Analys del 1, 4,5 hp	Analys del 2, 4,5 hp
Mekanik, 3 hp	Dynamik, 3 hp
Termin 3	
Transformteori, 4,5 hp	Statistik, 4,5 hp
Signaler och system, 3 hp	Mätteknik, 3 hp

Den matematik, som ingår i uppläggningsen, utgör det totala matematikinnehållet i en högskoleingenjörsutbildning med inriktning mot datateknik/elektroteknik. De i uppläggningsen ingående tillämpningarna är förstås endast en delmängd av de tillämpningar, för vilka

matematiken kommer till användning inom resp. utbildningsprogram. För maskinteknikprogrammet och miljöteknikprogrammet, som har något mindre matematik, ingår 4 eller 5 av de 6 modulerna.

Ordningsföljden i uppläggningsen bestäms av matematiken, och tillämpningarna är valda för att passa in i matematikens ordning. Man kanske kan göra tvärt-om, d.v.s. utgå från en lämplig sekvens av tillämpningar och efterhand ta upp de matematikmoment som behövs. Vi anser dock att matematiken är den mest centrala delen i uppläggningsen, och den bör därför styra ordningsföljden.

Tillämpningarna är hämtade från ämnesområdena fysik, datateknik, elektroteknik, maskinteknik och miljöteknik och de är lika för alla program, som läser respektive modul. Alternativet hade varit att låta varje program ha egna tillämpningar inom sitt huvudämne, men vi har föredragit att låta alla studenter få tillämpningar inom olika områden och betraktat detta som del i den ”tekniska allmänbildning”, som alla ingenjörer bör ha.

Ett syfte med tillämpningarna är att introducera ingenjörsvärktyg, t.ex. beräkningshjälpmedel som utgör en viktig länk mellan matematiken och tillämpningarna.

### **3. Upplevda för- och nackdelar med uppläggningsen**

Traditionellt motiveras matematiken inom ingenjörsutbildning genom att hänvisa till att den behövs för att lösa problem i tillämpningar, som kommer senare i utbildningen. Genom att en tillämpning studeras parallellt kan en teknisklärare beskriva ett tekniskt problem redan innan man har tillgång till den matematik som behövs för att lösa problemet. När matematiken sedan går igenom har studenterna redan en bild av ett sammanhang, där den kan komma till användning, och för många studenter underlättar detta att ta till sig matematiken.

Genom att matematik och tillämpningar hålls tydligt separerade från varandra i olika moduler med olika lärare får studenterna - trots att modulerna läses parallellt och samverkar - en tydligare bild av vad som är matematik och vad som är tillämpningar. Detta bidrar såväl till att betona ”matematikens roll som ett generellt och abstrakt verktyg för problemlösning” (HSV2005, s.

13-14) som till att ”ge studenterna bra baskunskaper” i matematik ”i anslutning till möjliga tillämpningsområden” (HSV2003, s. 125).

Det har också upplevts som befriande för matematiklärare att inte behöva krysta fram exempel på användningsområden för matematiken. Frågor om detta från studenter har sällan dykt upp i matematikundervisningen, och i de fall det förekommit har matematikläraren med gott samvete kunnat hänvisa till den parallella modulen med matematiska tillämpningar i teknik.

En annan fördel vi upplevt är att studenterna helt enkelt får träffa fler lärare tidigt i utbildningen. Annars är det vanligtvis så att ett fåtal lärare - den som undervisar första matematikkursen plus ytterligare någon - får ta hand om alla studentkontakter i början av utbildningen. Med den beskrivna uppläggningsen blir det automatiskt så att fler lärare kommer i kontakt med och lär känna studenterna tidigare i utbildningen, vilket upplevs som positivt både för studenter och för lärare. Att visa upp matematiklärare och teknisklärare samtidigt vid första kurstillfället inger förtroende hos studenterna.

Ett allmänt problem, som studenter inom ingenjörsutbildningar kan uppleva, är just att matematik och tillämpningar inte är tillräckligt väl sammankopplade. Även om kurserna har varit väl koordinerade från början finns en risk att de efter några år har utvecklats åt olika håll. Vi menar att detta problem motverkas av det samarbete mellan matematikläraren och tekniskläraren, som krävs i den beskrivna uppläggningsen. Det gäller inte bara kopplingen till de tillämpningar, som ligger parallellt med matematiken, utan även de tillämpningar, som ligger senare i utbildningen, eftersom ofta samma lärare är involverade.

Då tillämpningarna introduceras parallellt utan att ”vänta på att matematiken är klar” så tillåts matematiken spridas ut över en längre tid i utbildningsprogrammet. Detta upplevs som gynnsamt för matematikinläringen.

Genom att studenterna i flera av tillämpningsmodulerna med användande av matematik får genomföra ganska omfattande projekt tillägnar de sig en upplevelse av att de klarar av denna användning. Detta ger dem en självkänsla, som kommer dem tillgodo senare.

En möjlig nackdel finns för de tillämpade ämnena som dels får anpassa delar av sina kurser efter matematikundervisningen och dels får sprida ut vissa delar av kurserna till att ligga tidigt tillsammans med matematiken.

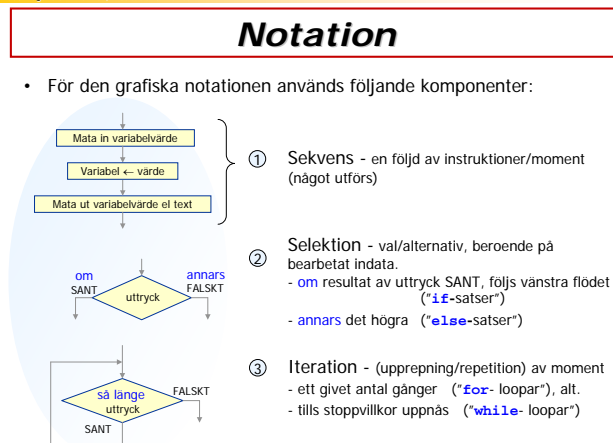
I jämförelse med andra vid Högskolan i Kalmar genomförda försök med integration av undervisning i matematik och teknik innebär det beskrivna en säkrare kontinuitet. Organisationen vid många andra försök har varit sådan att genomförandet av en kurs har varit alltför beroende av en eller några få eldsjäljar. Om en eldsjäl flyttar på sig kan hela uppläggnen förändras. I det presenterade förslaget byggs en kurs upp av två poängsatta moduler, en i matematik och en i ett teknikämne, t.ex. elektroteknik. Matematikdelen undervisas av matematiklärare och teknikämnet av teknicklärare. De två delarna ges i samma läsperiod och är tydligt kopplade i kursplanen. Kursen bör ha en kursansvarig som samtidigt är examinator för kursen. Då kursen innehåller två ämnen kan det administrativa arbetet med kursen bli mer trögt än för en kurs med bara ett ämne.

#### 4. Kursbeskrivning

I följande avsnitt beskrivs kortfattat de moduler av tillämpningar, vilka hör till respektive matematikmodul. Matematikmodulernas innehåll är det som traditionellt brukar ingå i liknande kurser och beskrivs därför inte mer specifikt här.

##### 4.1 Algebra med tillämpning Algoritmer

I tillämpningsmodulen Algoritmer får studenterna formulera algoritmer för att lösa givna problem i form av flödesscheman (som granskas av lärare före nästa steg) och därefter med tre olika räkneverktyg (MATLAB, MATHCAD och programmerbar kalkylator) lösa problemen enligt föreslagna algoritmer. Problemen kan t.ex. vara av typen "omvandla ett decimalt tal till binärt". Tanken är att detta ska fungera som en introduktion till programmering, ge allmän träning i problemlösning, ge vana vid att använda och ge motivation för olika begrepp inom algebra såsom olikheter, satslogik, heltal, restklasser, rekursion och kombinatorik samt ge praktisk erfarenhet av räkneverktyg. Figur 1 visar ett exempel på en bild ur föreläsningmaterialet om algoritmer.



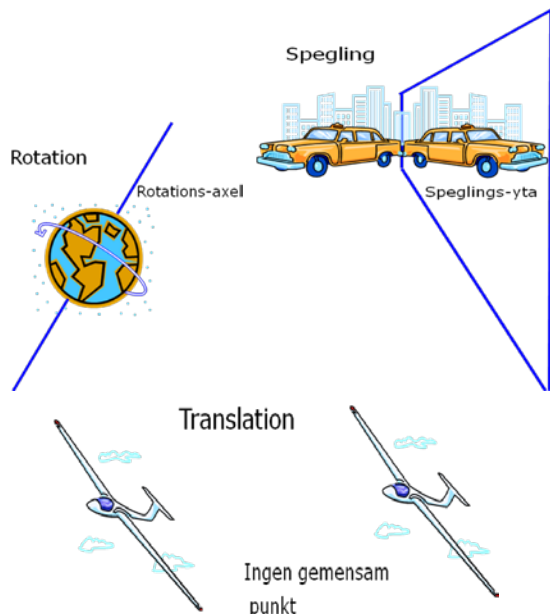
**Figur 1.** Ett exempel på en bild ur föreläsningmaterialet om algoritmer.

#### 4.2 Linjär algebra med tillämpning Datoranimeringar

Linjär algebra tillämpas genom att i MATLAB generera animeringar och datorgrafik. Skalärprodukt tillämpas genom att animera reflexion av ljus i polygoner. Momentet om linjära avbildningar tillämpas i animering och projektion av tredimensionella objekt. I figur 2 visas tre operationer som tillsammans kan beskriva varje rörelse. I figur 3 visas en robottillämpning av koordinattransformationer. Tillämpningen fungerar som en fortsättning i programmering och kan sägas vara central för elektro-, data- och maskininriktningar. Modulen i linjär algebra och tillämpningen i datoranimeringar har även utvecklats till en kurs som gavs via internet. Se hänvisning till kurssida (LinAlgHiK2007).

##### 4.3 Analys del 1 med tillämpning Mekanik

I mekaniktillämpningen studeras grundläggande begrepp såsom kraft, acceleration, impuls och rörelsemängd m.m. Dessa kopplas då till begreppet derivata, som är centralt i analyskursen. Som exempel får studenterna undersöka vad som händer när två curlingklot kolliderar, speciellt hur translations- och rotationsrörelserna överförs mellan kloten vid kollisionen. Utifrån Newtons lagar får studenterna färdigställa ett datorprogram, som ska simulera och visualisera en kollision mellan två curlingklot med givna begynnelsevärden.



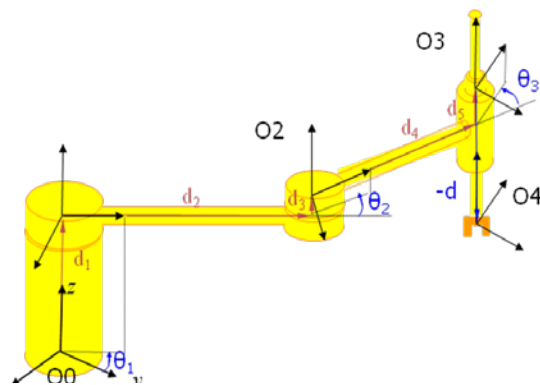
**Figur 2.** Tre operationer som tillsammans kan beskriva varje rörelse.

#### 4.4 Analys del 2 med tillämpning Dynamik

I tillämpningen Dynamik studeras svängningsrörelser, såväl mekaniska som elektriska sådana, och hur dessa kan analyseras och beskrivas med hjälp av differentialekvationer. Studenterna får först simulera svängningsrörelser med verktyget SIMULINK. Därefter får de praktiskt studera dels mekaniska svängningar, som genereras av krafter som verkar på fjädrar och mekaniska dämpare, dels elektriska svängningar, som genereras av elektriska strömmar som passerar induktanser, kapacitanser och resistanser.

#### 4.5 Transformteori med tillämpning Signaler och system

I tillämpningen Signaler och system introduceras begrepp som spektrum, impulssvar och överföringsfunktion med utgångspunkt från ett praktiskt exempel, där en RC-krets matas med en fyrkantvåg. Exemplet är tänkt att motivera behovet av att använda serier, transformer och faltningar för att kunna göra beräkningar av signalformer, effekter och andra storheter. Studenterna får göra beräkningar på signaler och system med hjälp av verktyget MATLAB samt får göra praktiska mätningar på signaler och system i både tids- och frekvensplan med hjälp av oscilloskop och spektrumanalysator.



**Figur 3.** En robottillämpning av koordinattransformationer.

#### 4.6 Statistik med tillämpning Mätteknik

Grundläggande begrepp är sannolikhet för händelser, betingad sannolikhet, frekvensfunktion, kurvanpassning (minsta-kvadrat-metoden). Tillämpningar med verktyg såsom Excel och MATLAB omfattar statistisk inferens och konfidensintervall, experiment och stickprov, skattning av mätfel, riskanalys och hypotesprövning.

### 5. Bedömning

Under de år kurserna gått vid Högskolan i Kalmar har olika typer av utvärderingar gjorts. Överlag är lärare, studenter och externa utvärderare positiva. Vi redovisar först några citat från studenter.

- Jag förstod själva matematiken bättre tack vare datorövningarna.
- Det var kul att man fick chans att använda matematikkunskaperna på ett intressant och databaserat sätt.
- Det var bra att man förstod vad matematiken användas till. I stället för räkna med bara siffror på en figur man inte ser, så kunde man se vad som hände.
- Man fick förståelse för matriser. Man fattade verkligen vad olika sakerna innebär, ...
- Vill ha mer!

Bland reflektioner från lärare och handledare märks följande.

- Studenterna förstår den matematiska bakgrunden för uppmätta grafer mycket bättre än jag gjorde under mina egna studier. (Magisterstudent, handledare)

- *Ingenjörsvetenskap ger möjlighet för studenter att möta lärare från olika ingenjörsområden tidigt under utbildningen och att diskutera användningen av matematik medan matematikkurser pågår.* (Lärare 1)

- *Samverkan innebär en viktig möjlighet för inblandade lärare att besöka varandras föreläsningar för att den vägen få impulser och nya infallsvinklar på sitt teknikämne. Jag tror också att det har ett stort värde att bevista en föreläsning i ett annat ämnesområde. Man får en bra möjlighet att uppleva studenternas situation.* (Lärare 2)

Vid utvärderingen av ingenjörsutbildning 2002 skriver Högskoleverket

*På vilket sätt matematiken skall integreras i teknikämneskurserna diskuteras ständigt. Vid Högskolan i Kalmar görs nu en intressant matematiksatsning inom kursen Ingenjörsvetenskap, där en 3 poängs matematikkurs integreras med en kurs om 2 poäng teknisk tillämpning under de fyra första läsperioderna. Undervisningen genomförs i samarbete mellan en matematiklärare och teknicklärare. Utvärderingar har redan visat att genomströmningen ökat betydligt.* (HSV 2003 s. 14)

Utredarna av matematikundervisningen på första året av tekniska och naturvetenskapliga utbildningar skriver.

*Ett unikt exempel på hur man kan anknyta matematiken till tillämpningsämnena finns, (...) i Kalmar. Där består varje kurs på 5 poäng av 3 poäng matematikteori och 2 poäng projekt som examineras av något av de tillämpningsämnena. Så vitt vi kan bedöma verkar detta vara ett intressant upplägg.* (HSV 2005 s. 50-51)

## 6. Dagens verksamhet

Under åren 2002 till 2007 bedrevs matematikundervisningen på ingenjörsutbildningen vid Högskolan i Kalmar enligt den beskrivna modellen. 2007 splittrades ingenjörsutbildningen i Kalmar. Elektroteknik och maskinteknik flyttades till lärosätena i Blekinge respektive Växjö. Därmed upphörde kurserna. Övergången har gett oss möjligheten att på nytt försöka entusiasmera kollegor för en idé, som lärare och studenter har funnit mycket effektiv.

## 7. Sammanfattning av idéerna bakom uppläggningsen

Vi avslutar med att sammanfatta idéerna bakom den i detta bidrag beskrivna uppläggningsen av matematik och matematiska tillämpningar i teknik.

Matematikdelen i uppläggningsen är en sekvens av "traditionella" matematikkurser, d.v.s. de som vanligtvis ingår i en ingenjörsutbildning eller i ett huvudämnesstudium i matematik. Ordningen mellan matematikkurserna är också "traditionell" med den smärre modifikationen att all algebra, både grundläggande och linjär, läses innan analys. I första hand har tillämpningarna anpassats.

Tillämpningarna löper parallellt med matematiken och tillåts ibland gå före matematiken i syfte att öka motivationen för matematiken.

Matematik och tillämpningar är väl synkroniserade men är tydligt separerade i olika moduler, så att det blir tydligt för studenterna vad som är matematik och vad som är tillämpningar.

Matematiken sprids ut över en längre tid i utbildningsprogrammet.

Tillämpningarna är valda från olika ämnesområden (data-, elektro-, maskin- och miljöteknik). Programmen läser dessa tillsammans för att få en "teknisk allmänbildning" (och för den ekonomiska samläsningsvinsten).

Samarbetet mellan matematiklärare och teknicklärare förhindrar att kurserna divergerar från varandra och hjälper teknicklärarna att behålla sina matematikkunskaper.

Kursorganisationen bedöms robust mot personförändringar i lärarstaben samt mot program- och inriktningsförändringar.

Studenterna får tidigt använda matematiken till att lösa relativt omfattande uppgifter.

Fler lärare får träffa studenterna tidigt i utbildningen.

## Erkännande

Vi står i tacksamhetsskuld till alla våra kollegor och studenter som deltagit i diskussioner, utveckling och genomförande av kurserna i ingenjörsvetenskap.

## Litteratur

HSV 2003, Höskoleverkets rapport 2003:20 R  
*”Utvärdering av högskoleingenjörutbildning,  
ingenjörutbildning samt brandingenjörutbildning  
vid svenska universitet och högskolor”.*

HSV2005, Höskoleverkets rapport 2005:36 R,  
Anders Tengstrand och Ola Helenius,  
*”Nybörjarstudenter och matematik -  
matematikundervisningen under första året på  
tekniska och naturvetenskapliga utbildningar”.*

LinAlgHiK2007, Linjär algebra på nätet:  
[www.nu.hik.se:8080/hik](http://www.nu.hik.se:8080/hik),  
användarnamn: *imf110demo*;  
lösenord: *imf110demo*.