Matematisk problemlösning

För utveckling av personliga och professionella förmågor

Linda Mattsson och Robert Nyqvist

Blekinge tekniska högskola
Institutionen för matematik och naturvetenskap

16 augusti 2017

Personliga och professionella förmågor

- Ökade kunskaper inom vissa matematiska innehåll
- Grupparbetsprocesser, såsom att anta olika roller, lyssna aktivt, vara tydlig i kommunikationen, förhandla och hantera konflikter
- Uthållighet, kreativt tänkande, kritiskt tänkande och tolkning av problemformulering
- Hypotesformulering och hypotesprövning
- Mod, självförtroende och självkännedom
- Planering av tid och resurser samt vikten av att ta ansvar

Grupparbetsprocesser: anta olika roller, lyssna aktivt, vara tydlig i kommunikationen, förhandla och hantera konflikter

- Svåra matematiska problem stimulerar grupparbete
- Svåra matematiska problem betraktas som grundkurs ej överkurs
- Problemlösningsexamination i grupp (4h, skriftlig gemensam inlämning, slumpade grupper, ingen förväntas få alla rätt)
- Förberedande undervisning: problemlösning, efterläsning, redovisning

Uthållighet, kreativt tänkande, kritiskt tänkande och tolkning av problemformulering samt hypotesformulering och hypotesprövning

- Problemlösning måste få ta låååång tid
- Enbart imitation räcker inte – problem är per definition inga rutinuppgifter
- ”Jag fattar ingenting!” duger inte – formulera exakt vad du kan respektive vad du behöver söka svar på
- Förberedande undervisning: svår problemlösning, särskild undervisning OM matematik och matematisk problemlösning
- Krävs vid problemlösningsexamination och tentamen

Mod, självförtroende och självkännedom

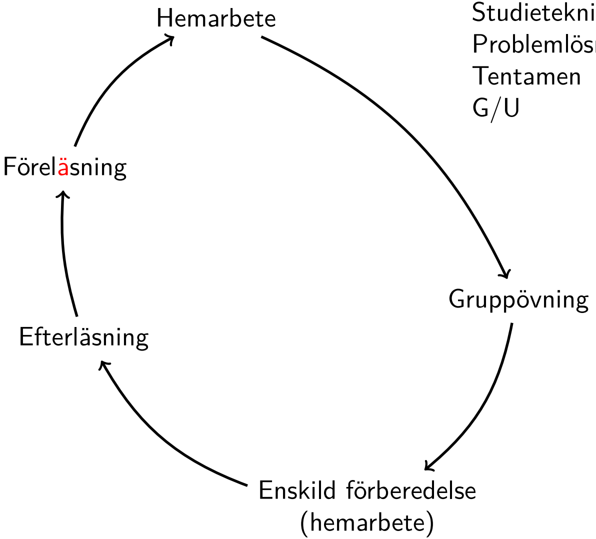
- Svåra problem som inte premieras av imitation skapar oro
- Studenter blir inledningsvis ängsliga, får hopplöshetskänslor och upplever att de inte kan någonting
- Arbetet leder efter hand till betydande medvetenhet om vad de kan, inte kan, hur de kan gå vidare
- Förberedande undervisning:
  - Eftersträvar förtroendeingivande och tillåtande atmosfär
  - Studieteknik, attitydarbete och personlig utveckling – att stödja mentalt
  - Skiljer på prestation och identitet
  - Visar att vi tror på studenterna och pekar på framsteg
  - Begränsad tillgång till facit stimulerar egna kontrollmetoder
- Krävs vid i problemlösningsexamination och tentamen

Planering av tid och resurser samt vikten av att ta ansvar

- Kontinuerligt pågående process
- Förberedande undervisning: Studieteknik, efterläsning
- Krävs bland annat vid problemlösningsexaminationen

Matematik grundkurs

Cykler av aktivitet, debriefing och uppföljning



Studieteknik
Problemlösning
Tentamen
G/U

OM
matematisk
problemlösning
och matematik

I
matematisk
problemlösning

Matematisk problemlösning

uppövning

Efterläs

Attitydarbete
Studieteknik
Personlig utveckling

Några exempel på övningar . . .

Imitationsuppgift kontra problem

Exempel

Visa att

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

där n är ett positivt heltal.

Exempel (Den ökända duellen vid O.K. Corral)

Låt m vara ett udda naturligt tal. I gryningen ska m revolvermän mötas i en duell. De står med olika avstånd från varandra (avstånden mellan varje möjligt par av revolvermän är olika). De dra sina vapen samtidigt och var och en skjuter på den som står närmast. Alla träffar sina mål och de som träffas dör. Visa att minst en överlever.

Exempel

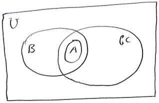
Låt A, B och C vara mängder. Visa att om $A \subseteq B \cap \complement C$, så $C \subseteq \complement A$.

Ta $a \in A$ godtyckligt. Då måste $a \in B \cap \complement C$.
Alla a finns då i komplementet till C'.
Då måste alla c vara inuti komplementet till a.

Att redovisa lösningar

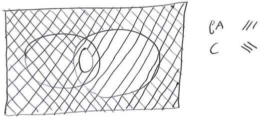
Bevis mha Venndiagram

Antag att $A \subseteq B \cap \complement C$. Det kan illustreras som följande figur.



(Istället för att markera mängden C med en ellips har vi valt att markera $\complement C$. Allt utanför ellipsen $\complement C$ motsvarar mängden C.)

I följande figur har vi skuggat mängderna $\complement A$ och C.



Vi ser att mängden C är en delmängd till $\complement A$.

Q.E.D.

Antag att $A \subseteq B \cap \complement C$. Tag $c \in C$ godtyckligt. Då gäller att $c \notin \complement C$. Från defintionen av snitt följer därmed att $c \notin B \cap \complement C$, eftersom $B \cap \complement C$ består av samtliga element som tillhör både B och $\complement C$. Enligt antagandet tillhör varje element i A också $B \cap \complement C$. Alltså kan inte c vara ett element i A utan är istället ett element i $\complement A$, dvs $c \in \complement A$. Det visar att $C \subseteq \complement A$.

Exempel

Ett halvtal är ett tal a sådant att $2a$ är ett heltal.

a. Visa att summan av två halvtal också är ett halvtal.
b. Visa att produkten av två halvtal inte alltid är ett halvtal.
c. Bevisa att $a^2 + a/2$ är ett halvtal för vilket som helst halvtal a.

Exempel

Lös ekvation $\sqrt{x^2 - x - 10} - \sqrt{x^2 - 11x} = 10$.

Exempel

Låt $n \geq 2$. Visa att n kvadrater, inte nödvändigtvis lika stora, kan var och en delas upp i delar genom att klippas utmed räta linjer så att bitarna kan pusslas ihop till en stor kvadrat – utan hål.

Exempel

Vad menas med att något ska bevisas för ett godtyckligt element $a \in A$?

a. Att man kan välja att visa påståendet för något element $a \in A$.
b. Att man ska visa att påståendet gäller för varje element $a \in A$.

Exempel

Vilka av följande likheter är felaktiga?

a. $\sqrt{16} = \pm 4$
b. $-2^2 = 4$
c. $\{\text{romber}\} = \{\text{kvadrater}\} \cup \{\text{icke-rätvinkliga rektanglar}\}$
d. $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$

Exempel
Med ordningsrelationen *mindre än* erhåller vi en enkel och välbekant ”ranking” av de naturliga talen:

$$1 < 2 < 3 < 4 < \cdots . \tag{1}$$

Vi ska här studera ett helt annat sätt att ordna de naturliga talen:

$$\begin{aligned} 1 &\prec 2 \prec 2^2 \prec 2^3 \prec \cdots \prec 2^n \prec \cdots \\ &\prec \cdots \prec 2^n \cdot 9 \prec 2^n \cdot 7 \prec 2^n \cdot 5 \prec 2^n \cdot 3 \\ &\prec \cdots \prec 2^2 \cdot 9 \prec 2^2 \cdot 7 \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 3 \\ &\prec \cdots \prec 2 \cdot 9 \prec 2 \cdot 7 \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 3 \\ &\prec \cdots \prec 9 \prec 7 \prec 5 \prec 3. \end{aligned} \tag{2}$$

Med andra ord betraktas 1 som det minsta elementet och 3 som det största elementet i $\mathbb{N}$ med avseende på denna relation, som kallas för *Sharkovskys relation*.

Problemlösning

1. Varje naturligt tal kan skrivas entydigt på formen $2^k u$, där k är ett icke-negativt heltal och u ett udda heltal (ni behöver inte bevisa detta faktum). Bestäm motsvarande k och u för respektive nedanstående heltal.

$$1,\ 12,\ 16,\ 48,\ 124,\ 154,\ 256,\ 257.$$

2. Rangordna talen i föregående uppgift med avseende på Sharkovskys relation.
3. Visa den sk *dubbleringsregeln*: $a \prec b$ om och endast om $2a \prec 2b$. Dela in beviset i fyra olika fall:

   Fall 1: $a = 2^k$ och $b = 2^l$ Fall 2: $a = 2^k u$ och $b = 2^l$

   Fall 3: $a = 2^k$ och $b = 2^l v$ Fall 4: $a = 2^k u$ och $b = 2^l v$

   där k och l är icke-negativa heltal samt u och v är udda heltal större än 1.
4. Man kan inte ersätta 2:an med en 3:a i föregående uppgift. Motivera varför.

Problemlösning

Exempel

Stu D. Ent läser en kurs i linjär algebra och har i kursboken kommit fram till följande sats.

> ***Sats*** *Låt F vara en linjär avbildning på $\mathbb{R}^3$. Då är följande påståenden ekvivalenta.*
>
> a. *F är injektiv*
> b. *F är inverterbar*
> c. *$F(v) = 0$ endast för $v = 0$.*

För att lösa uppgifterna som följer behöver du inte känna till de begrepp som nämns i satsen.

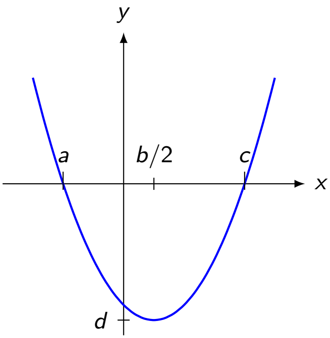
a. I beviset av satsen visar man i kursboken i tur och ordning de tre implikationerna

   "om F är injektiv, så är F inverterbar"
   "om F är inverterbar, så är $F(v) = 0$ endast då $v = 0$"
   "om $F(v) = 0$ endast då $v = 0$, så är F injektiv".

   Är detta ett giltigt bevis? Motivera ditt svar.

Exempel

Tre studenter, som här kallas a, b och c, på kursen MA1480 har löst en kvadratkompletteringsuppgift och fått olika svar. När de kikar i facit finner de att svaret inte är givet på algebraisk form, utan är istället representerat grafiskt enligt bilden nedan.



Vilken eller vilka av studenterna har löst uppgiften korrekt?

a) $y = \left(x - \dfrac{b}{2}\right)^2 + d$

b) $y = \left(x - \dfrac{b}{2}\right)^2 - d$

c) $y = \left(\dfrac{b}{2} - x\right)^2 + d$

Tentamen

Exempel
Förenkla uttrycket

$$\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

så mycket det går.

Exempel
På följande två sidor presenteras en felaktig lösning av ett problem. Hitta samtliga fel. Markera felen i lösningen, t ex genom att ringa in och numrera dem. Förklara på separat papper vad som är fel i respektive fall.

Tentamen

Uppgift: Avgör om

$$\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}-\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$$

är ett irrationellt tal

Lösning: $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}-\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = x \iff$

$$x^2 = \frac{\sqrt{5}+2-(\sqrt{5}-2)}{3-2\sqrt{2}} \iff$$

$$x^2 = \frac{\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+2}{3-2\sqrt{2}} \iff$$

$$x^2 = \frac{4}{3-2\sqrt{2}} \iff$$

$$x^2 = \frac{4}{1+2-2\sqrt{2}} \iff$$

$$x^2 = \frac{4}{1^2+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}} \iff$$

$$x^2 = \frac{4}{(1-\sqrt{2})^2} \iff$$

$$x = \frac{2}{1-\sqrt{2}}$$

Vänd →

Det ser ut som att x är ett irrationellt tal. Jag visar detta med ett motsägelsebevis.

Sätt $x = \frac{a}{b}$ där a och b är heltal. Talet x är då enligt definitionen ett rationellt tal oavsett val av a och b.

Vi får nu att

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{1-\sqrt{2}} \iff a(1-\sqrt{2}) = 2b \iff$$

$$1-\sqrt{2} = \frac{2b}{a} \iff 1-\frac{2b}{a} = \sqrt{2}$$

$$\iff \frac{a-2b}{a^2} = \sqrt{2}$$

VL är en kvot mellan två heltal och är därför ett rationellt tal. HL är å andra sidan ett irrationellt tal. Vi har en motsägelse. Talet x kan alltså inte vara rationellt, dvs det är irrationellt.

Tentamen

Exempel

I det lilla fiktiva samhället Skvallerholm bor det n stycken personer, där $n \geq 4$. Antag att de alla har kännerdom om varsin hemlighet som de vill föra vidare till samtliga i Skvallerholm. Inledningsvis är varje hemlighet känd av endast en person. Vidare antar vi att de nå varandra via telefon. Visa att det räcker med $2n - 4$ telefonsamtal för att sprida samtliga hemligheter till samtliga Skvallerholmsbor.

Exempel

Låt $P(x)$ och $Q(x)$ representera påståendena

$P(x)$: *"x är ett rationellt tal"*
$Q(x)$: *"$\sqrt{x}$ är ett rationellt tal".*

Vilken eller vilka av följande påståenden är sanna?

a. $\forall x \in \mathbb{R} : P(x) \Rightarrow Q(x)$
b. $\exists x \in \mathbb{R} : P(x) \Rightarrow Q(x)$
c. $\forall x \in \mathbb{R} : Q(x) \Rightarrow P(x)$

Tack för er uppmärksamhet!